HEISENBERG BELİRSİZLİK İLKESİ

Özgür Gültekin

Kuantum mekaniğinin temelleri *Heisenberg Belirsizlik İlkesine* dayanır. Bu nedenle Heisenberg Belirsizlik İlkesi bilimin birçok alanı dışında felsefe, sanat ve popüler kültürü de en az Einstein'ın ünlü $E = mc^2$ formülü kadar etkilemiştir. Bu yazıda ilk olarak Heisenberg Belirsizlik İlkesinin bir parçacığın konum ve momentum ölçümündeki belirsizlik ilişkisini betimleyen özel bir halini vereceğiz. Daha sonra Belirsizlik İlkesinin bu özel biçiminin hangi fiziksel ve matematiksel temellere dayandığını tartışacağız. Son olarak Hilbert uzaylarının ve lineer operatörlerin matematiksel dilini kullanarak Belirsizlik İlkesinin genel biçimini elde edeceğiz.

Belirsizlik İlkesinin fiziksel temelleri hakkında konuşabilmek için Fransız fizikçi de Broglie'un madde dalgaları fikrini ve Alman fizikçi Max Born'un kuantum mekaniğinde dalga fonksiyonunun istatistiksel yorumunu hatırlayarak başlıyoruz.

Madde Dalgaları ve Dalga Parçacık İkililiği

20. yüzyılın ilk yıllarında detayları klasik fizik ile anlaşılamayan bazı fiziksel olaylar birikmeye başlamıştı. Bunların en önemlilerini sıralayalım. *Karacisim Işıması* sırasında, karacismin ışınım şiddetinin dalgaboyuna göre dağılımı istatistik fiziğe dayanan klasik teorilerle açıklanamıyordu. Bir metal üzerine düşürülen ışığın yüzeyden elektron kopartması olarak bilinen *Fotoelektrik Olayın* detayları da klasik elektromanyetik teori ile uyumlu değildi. Ayrıca bir ışık demetinin serbest bir elektron ile çarpışmasına dayanan *Compton Olayında* da klasik elektromanyetik teori ile çelişen deneysel sonuçlar gözleniyordu. Karakteristik X ışınlarının spektrumlarının klasik fizikle açıklanamaması da bir başka problemdi. Bu saydığımız olaylara ilişkin o dönem yapılan açıklamaların çeşitli problemler içermesinin temel nedeni klasik anlayışa göre ışığın sadece elektromanyetik dalga olarak betimlenmesiydi. Oysa bu fiziksel olaylar, elektromanyetik ışımanın kuantalanmış olduğu yani momentum taşıyabilen enerji paketlerinden oluştuğu göz önünde bulundurulmadan çelişkisiz biçimde açıklanamaz. Einstein'ın kuantum teorisinin doğuşuna yaptığı önemli katkı 1905'de ışığın $h\nu$ enerjili fotonlardan oluştuğunu varsayarak fotoelektrik olayın detaylarını tam olarak açıklamasıydı. Bu varsayım, bir ışık demetindeki enerjinin uzayda sürekli dağılmayıp bölünemeyen enerji kuantumlarından oluştuğu anlamına gelir. Yukarıda sıraladığımız fiziksel olayların açıklanabilmesi ancak ışığın parçacık özelliği de gösterebileceğinin kabul edilmesiyle mümkün oldu.

Fotonların hem dalga hem de parçacık özelliği gösterdiğinin anlaşılmasından sonra de Broglie çılgınca görünen bir fikir attı ortaya: Fotonların dalga-parçacık ikililiği sergilemesi gibi acaba madde de mikro dünyada dalga-parçacık ikililiği gösteriyor olabilir mi?

1924 yılında savunduğu doktora tezinde de Broglie, h Planck sabiti olmak üzere, momentumu p olan bir parçacığın dalgaboyunun $\lambda_d = h/p$ formülü ile temsil edileceğini iddia etti. O dönemde henüz bu doğrultuda bir deneysel kanıt olmamasına rağmen bu hipotez, Bohr atom modelinde açısal momentumun kuantalanma koşulunu açıklama potansiyeline sahip bir yaklaşım sunduğu için ciddiye alındı. Daha sonra elektron dalgalarının varlığı, 1927 yılında Amerikalı fizikçiler Davisson ve Germer tarafından yapılan elektron kırınım deneyleriyle doğrulandı. Elektronların dalga özelliğini keşfettiği için de Broglie 1929 yılında Nobel Fizik ödülünü almaya hak kazandı. Klasik dünyada bir karşılığı olmayan dalga-parçacık ikililiği elektron mikroskobunun icadınına olanak sağlayarak bilim ve teknolojide önemli bir ilerlemeyi yarattığı gibi Heisenberg Belirsizlik İlkesinin de kuramsal temellerini oluşturur. Bunu ileride yeniden ele alacağız.

Kuantum Mekaniğinin İstatistiksel Yorumu

Klasik mekanikte bir $\mathbf{F}$ kuvveti altında konumu $\mathbf{x}(t)$ olan bir parçacığın hareketi $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = d^2(m\mathbf{x})/dt^2$ biçimindeki Newton ikinci kanunla betimlenir. Klasik mekanikte belirli bir t anında parçacığın hız ve momentumunu bilmemiz parçacığın hareketi ile ilgili durumunu belirlememizi sağlar. Kuantum mekaniğinde ise bir parçacığın fiziksel durumu geleneksel olarak $\psi(x,t)$ şeklinde yazılan bir dalga fonksiyonu ile belirlenir. Bu fonksiyon bir bakıma klasik mekanikteki hareket denkleminin kuantum mekaniğindeki karşılığı olarak yorumlanabilecek

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$$

biçimindeki zamana bağlı Schrödinger denkleminin çözümünden elde edilir. Burada t zamanı, $\hbar = h/2\pi$ olmak üzere bir sabiti ve V de parçacığın potansiyel enerjisini ifade eder.

Kolayca görüldüğü gibi belirli bir t anında verilen bir $\mathbf{x}(t)$ ile Newton hareket denklemini kullanarak başka bir t anındaki $\mathbf{x}(t)$'yi tespit edebiliriz. Bu, $\mathbf{x}(t)$'nin zaman evriminin deterministik olarak belirlendiği yani Newton hareket denkleminin deterministik bir süreci gösterdiği anlamına gelir. Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta Schrödinger denkleminin de benzer bir şekilde $\psi(x,t)$ dalga fonksiyonunun zaman evrimini deterministik olarak betimlediğidir. O halde kuantum mekaniğinde olasılık kavramları nerede ortaya çıkar? Kuantum mekaniğinin betimlediği dünya neden deterministik değil? Bunun cevabı, Born'un dalga fonksiyonunu istatistiksel biçimde yorumlamasında yatar. Bugün kuantum mekaniğinde yaygın olarak kabul edilen Born'un istatistiksel yorumuna göre

$$\int_a^b |\psi(x,t)|^2\, dx$$

ifadesi parçacığın t anında a ile b arasında bulunma olasılığını verir. Bu yoruma göre $|\psi(x,t)|^2$ ifadesi olasılık teorisinden bildiğimiz olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak düşünülebilir. Burada, Schrödinger denkleminin çözümünden elde edilen $\psi(x,t)$'nin mutlak değer karesi olan $|\psi(x,t)|^2$ ifadesinin kendiliğinden bir olasılık yoğunluk fonksiyonu özelliği taşımadığını ve normlanması gerektiğini belirtmemiz yerinde olur.

Olasılık kavramı, kuantum mekaniğine Born'un yukarıda açıkladığımız istatistiksel yorumuyla birlikte girer. Dalga fonksiyonunun istatistiksel yorumu deneylerle uyumlu olup hem teknolojik anlamda hem de kültürel açıdan modern Dünya'nın kurulmasında son derece önemli bir etkiye sahiptir. Bu aşamada kaçınılmaz olarak insanın aklına bazı sorular geliyor. Born yorumunun bir sonucu olarak kuantum mekaniği bize bir parçacığın belirli bir anda, belirli bir aralıkta bulunma olasılığını veriyorsa bu gerçekten ne anlama gelir? Acaba ortaya çıkan bu olasılık doğanın kaçınılmaz bir özelliği mi yoksa bizim kuramımızın (kuantum mekaniği) bir eksiği mi? Bu soru kuantum mekaniğinin kuruluş yıllarından bu yana kapsamlı tartışmalar doğurmuştur. Bu soruya ilişkin iki farklı anlayışı aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür:

1.) Söz konusu olasılıklar, ölçüm yaptığımız sistemin doğasına ilişkin bilgi eksikliğimizden dolayı ortaya çıkar, yani olasılıklar epistemolojiktir. Böyle bir anlayışın bir mantıksal sonucu şudur: Eğer olasılıklar epistemolojik ise ölçüm yapmadan önce parçacık belli bir anda a ile b arasında belli bir konumda bulunuyor olmalıdır. Oysa kuantum mekaniği ölçümden önce parçacığın konumu ile ilgili sadece olasılıklara dayanan sonuçlar verir. Bu durum, kuantum mekaniğinin parçacığın konumunu öngörme yeteneğine sahip olmadığı anlamına gelir. Başka bir deyişle kuantum mekaniği tam değildir.

2.) Olasılıklar teorimizin sınırlarından kaynaklanmayıp doğanın kendisine özgüdür yani doğanın ayrılmaz bir parçası, onun içsel bir özelliğidir. Bu durumda ölçümden önce taneciğin belli bir konumundan bahsetmek zaten olanaklı değildir. Yani olasılıklar ontolojiktir. Parçacığın belirli bir konumda bulunması ancak ölçümle mümkün olur. Bu nedenle ölçümden önce parçacık nerede bulunuyor sorusu anlamlı değildir.

Okurun bu aşamada durup olasılıkların doğaya ait olmasının ya da bizim teorimizin eksikliğinden kaynaklanmasının ne anlama geldiğini dikkatlice düşünmesi gerekir. Bu ikisi arasındaki fark birbirinden çok farklı evren anlayışlarını doğurur. Bu sorunun cevabı nedensellik yasasının kapsamlı bir çözümlemesini de gerektirir. Modern kuantum mekaniğinin yaklaşık yüz yıllık gelişimi sırasında Einstein-Podolsky-Rosen makalesi, Bell eşitsizlikleri, Aspect deneyi, dolaşıklık kavramı, Pusey-Barrett-Rudolph teoremi gibi gelişmelerle hikayenin modern görünümü oldukça değişmiştir. Dahası sorunu sadece (1) ve (2)'de verildiği gibi sınırlandırmak belki de problemi her yönüyle ele alma konusunda yanıltıcı bir yaklaşım olabilir. Bu yazının sınırları ve konuya modern yaklaşımın karmaşıklığı nedeniyle biz yine de tartışmayı bu çerçevede ele alacağız. Burada konuyu ele alış biçimindeki amacımız

Belirsizlik İlkesini anlaşılır ve modern anlayışına yakın bir biçimde okura sunmaktır. Yine de bu aşamada aşağıdaki noktayı vurgulamamız yerinde olur:

Bisiklete binerek hareket eden birini klasik mekanik çerçevesinde inceleyebiliriz. Tekerleğin yer ile yaptığı sürtünme olayı bile aslında mikro özelliklerden kaynaklansa da uygulamada mikro özellikleri görmezden gelerek maddenin cinsine bağlı olan bir kinetik sürtünme katsayı kullanırız. Hareketin her türlü detayı klasik mekanik çerçevesinde belirlenebilir. Bu evrenin işleyişine dair yüzeysel bir bilgi verir bize. Yani aslında klasik mekanik hayatımızı son derece kolaylaştırsa da sadece görünüme dayalı bir teoridir. Fiziksel evreni en genel anlamda açıklamak yerine olguları belirli bir gerçeklik sınırı içinde ele alır. Bu nedenle yukarıda sunduğumuz olasılıkların epistemolojik mi yoksa ontolojik mi olduğu problemi hem de birazdan detaylarını sunacağımız Belirsizlik İlkesinin özü fiziksel gerçekliğin tüm doğasını kapsayan evrensel özellikleri yansıtıyor olabilir. Bu yazıda Born'un dalga fonksiyonunun istatistiksel yorumu hakkındaki olası anlayışları tartışmamızın ve Belirsizlik İlkesini bu anlayışlar çerçevesinde ele almamızın nedeni de budur.

Konum ve Momentum Arasındaki Belirsizlik İlişkisi

Artık Heisenberg Belirsizlik İlkesinin özel bir hali olan konum ve momentum arasındaki belirsizlik ilişkisini ifade edip üzerine konuşabiliriz. Taneciğin konumundaki belirsizlik Δx ve momentumundaki belirsizlik Δp olmak üzere

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

biçimindedir. Yani parçacığın momentumundaki belirsizlik ile parçacığın konumundaki belirsizliğin çarpımı $\hbar/2$ değerinden daha küçük olamaz. Bir parçacığın konumundaki belirsizlik ne kadar küçükse momentumundaki belirsizlik de o kadar büyük olur. Bir bölgede yerelleşmiş bir dalga fonksiyonunu dalga paketi olarak adlandırıyoruz. Konum ve momentum arasındaki Heisenberg Belirsizlik ilişkisi bir dalga paketinin Fourier analizini temel alan $\Delta x \Delta k \geq 1/2$ biçimindeki bir teoremle birlikte de Broglie'un dalga parçacık ikililiğini temsil eden $\lambda_d = h/p$ ifadesine dayanır. İleride Belirsizlik İlkesinin genel biçimini kanıtlayacağımız için bu aşamada sadece Belirsizlik İlkesinin fiziksel olarak dalga parçacık ikililiğinin sonucu olduğunu söylemekle yetiniyoruz.

Şimdi bu ilkeyi daha iyi anlamak için bazı uyarılar yapacağız.

a.) Elbette tek bir parçacığın konumu ölçüldüğünde kesin bir değer bulunur. Benzer bir biçimde tek bir parçacığın momentumu da ölçüldüğünde yine kesin bir değer bulunur. Buradaki Δx ve Δp ifadeleri istatistiksel anlam taşır. Yani Heisenberg Belirsizlik İlkesi özdeş olarak hazırlanmış parçacık sistemlerindeki özdeş ölçmelerin sonuçlarına yönelik bir sınırlamayı ifade eder. Aslında özdeş olarak hazırlanmış sistemlerden alınan konum ölçümleri ya da benzer olarak momentum ölçümleri aynı sonuçları vermez. Dolayısıyla konum ve momentum ölçümleri ortalamadan bir sapma gösterir. İşte burada Δx ve Δp ifadeleri özdeş olarak hazırlanmış sistemlerin konum ve momentum ölçüm sonuçlarının standart sapmasıdır. Şimdi okur dalga fonksiyonunun Born yorumu üzerine yeniden düşünmelidir. Zaten kuantum mekaniği parçacığın konumuyla ilgili olarak ancak onun bir aralıkta gözlenme olasılığını öngörmüyor mu? Bu nedenle özdeş olarak hazırlanan sistemler üzerinde yapılan ölçümlerin aynı sonuçları vermemesi Born yorumuyla uyumludur. O halde Belirsizlik İlkesinin, istatistiksel yorumdan farklı olarak söylediği şey nedir? Elbette Belirsizlik İlkesi ölçüm sonuçlarının standart sapmaları üzerine nicel bir sınırlama getirir ve bu nedenle önemlidir.

b.) Belirsizlik İlkesinin istatistiksel bir özellik taşıdığını vurguladık. Okur, Belirsizlik İlkesinin özdeş şekilde hazırlanmış bir parçacık topluluğundan sadece tek bir parçacık için ne ifade ettiğini düşünmekte haklıdır. Ya tek bir parçacık üzerinde *aynı anda* konum ve momentum ölçümleri yapmayı denersek ne olur? Bu konuda Heisenberg'in düşüncesi tek tek ölçümler seviyesinde de bu belirsizlik ilişkisinin korunduğu biçimindedir. Bu anlayış Born'un dalga fonksiyonunun istatistiksel yorumunu aşar. Belirsizlik İlkesinin bu konuda ne söylediği Born'un istatistik yorumu dışında, bu yorumun (1) ve (2)'de sunduğumuz iki farklı anlayıştan hangisine dayandığına dair bir bilgiyi de içerir. Eğer yukarıdaki (2) görüşü doğru ise yani kuantum mekaniğindeki olasılıklar ontolojik ise zaten elektronun ölçümden önce kesin bir konumu ve ölçümden önce kesin bir momentumu yoktur. Bu durumda Belirsizlik İlkesi istatistiksel anlamı dışında tek bir parçacık için de geçerli olmalıdır. Heisenberg'in görüşleri bu doğrultudadır. Büyük olasılıkla bu nedenden ötürü Heisenberg, yukarıdaki fikrini 1927'deki makalesinde anlatırken bunun oluşturacağı yanlış anlamaları önemsemeden tek bir elektronun gözlenmesi örneğini verir. Oysa bu örneğin dikkatsiz bir kullanımı Belirsizlik İlkesinin deneysel kısıtlardan kaynaklandığı biçiminde bir yanlış anlamayı besler. Born yorumuna ilişkin açıkladığımız (1) düşüncesine göre Belirsizlik İlkesi kuantum kuramı tam olmadığı için vardır. Yani teorinin eksikliğinden kaynaklanmaktadır. Buna karşılık (2) düşüncesine göre ölçümden önce parçacığın kesin bir momentum ve kesin bir konumundan söz edemeyeceğimiz için Belirsizlik İlkesi doğanın bir özelliğidir. Yine de burada sunduğumuz çözümleme dikkate alınırken dalga fonksiyonunun istatistiksel yorumunun (1) ve (2)'ye indirgenmesinin sınırları olduğunu daha önce belirttiğimizi hatırlatmak isteriz.

c.) Şimdi bir an için Belirsizlik İlkesinin ne anlama geldiğini şu şekilde açıkladığımızı düşünelim: Konum ve momentumun değeri bir ölçme işlemi anında bozulur. Çünkü ölçümü yaptığımız deneysel araçlar ile ölçmek istediğimiz sistem arasında bir etkileşim vardır. Böylece ölçmek istediğimiz şeyi rahatsız ederiz. Yapılacak olan her ölçüm mikro dünyada sistem üzerine hatırı sayılır bir etki yarattığı için konum ve momentum ölçümünde Belirsizlik İlkesi ile kısıtlanan deneysel zorlukları doğurur. İşte bu deneysel zorluklar başlangıç koşullarını tam olarak belirlememizi etkilediği için belirsizliğin ortaya çıktığını düşünebilirsiniz. Gerçekten bu tarz deneysel zorluklar vardır ama Belirsizlik İlkesinin bu zorluklardan kaynaklanmadığını özellikle vurguluyoruz. Bu açıklama bazı deneysel sınırları vurgulaması yönünden doğrudur. Ancak Belirsizlik İlkesinin temelini açıklamak amacıyla kullanıldığında yanlıştır. Çünkü sorun bizim parçacığın hangi yörüngeyi takip ettiğini bilmiyor oluşumuz değil, kuantum mekaniğinin mikro parçacıklar için klasik yörünge kavramını ortadan kaldırmış olmasıdır. Aslında konum ve momentumun kuantum mekaniğindeki anlamlarını klasik değişkenler cinsinden ifade etmeye kalktığımızda Belirsizlik İlkesinin ortaya çıktığını söyleyebiliriz. Yani Belirsizlik İlkesi, ölçümü ne kadar iyi yaptığımızla ilgili olmayıp konum ve momentumun kuantum mekaniğindeki anlamıyla ilişkilidir.

d.) Son olarak dikkatli bir okur hemen şunu düşünebilir: Heisenberg Belirsizlik İlkesi kuantum mekaniğinin temelini oluşturuyorsa, bu belirsizliğin ontolojik olup olmadığını yeniden kuantum mekaniği ile belirlemeye çalışmak döngüsellik tehlikesi içermiyor mu? Bu soruyu şu şekilde cevaplayabiliriz: Her şeyden önce kuantum mekaniği deneylerle tamamen uyumlu olup oldukça iyi sonuçlar verir. Ayrıca bu alandaki bilimsel bilgimizin şimdiki sınırı kuantum mekaniğidir. Tam olup olmadığı konusundaki tartışma tümüyle çözülmüş olmasa da tarihsel gelişimi içinde bu konuda çeşitli deneysel ve teorik yaklaşımlar geliştirilmiş ve tartışma bu doğrultuda devam etmektedir.

Buraya kadar anlattıklarımızı özetleyecek olursak Belirsizlik İlkesinin (a)'da sunduğumuz istatistiksel anlamı Born'un dalga fonksiyonunun istatistiksel yorumuyla uyumludur. Belirsizlik İlkesinin tartışmasız biçimde kabul gören modern kavranışı bu şekildedir. Belirsizliğin kaynağı kuramımızın sınırları mı yoksa doğa mı sorusunun yanıtı ise Born'un istatistiksel yorumundaki olasılıkların ontolojik mi yoksa epistemolojik mi olduğu sorusu ile yakından ilişkilidir. Bununla birlikte belirsizliğin kaynağını deneysel zorluklara bağlama eğilimi bir kavram yanılgısıdır. Bu kavram yanılgısı klasik mekanikten alışkın olduğumuz parçacığın yörüngesini takip etme alışkanlığımızı terk edememizden doğar. Ayrıca Belirsizlik İlkesinin tek bir parçacık için öngörüsü ise yeterince açık değildir. Çünkü bunun cevabı yine (1) ve (2) anlayışlarından hangisinin geçerli olduğuna bağlıdır. Bu nedenle Belirsizlik İlkesinin istatistiksel anlamını vermek yerine konuyu tek parçacık üzerinden anlatan yaklaşım ya dalga fonksiyonunun istatistiksel yorumuna ilişkin (2) anlayışını benimsiyordur ya da orada bir kavram yanılgısı söz konusudur.

Genelleştirilmiş Belirsizlik İlkesi

Bir kuantum sistemi, iç çarpımın tanımlı olduğu, karmaşık lineer bir vektör uzayı olan Hilbert uzayında tanımlıdır. Önce fizikçilerin aşina olduğu Dirac (Bra-Ket) gösterimini matris formunda tanıtalım.

$$\left|a\right\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \left\langle a\right| = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & . & . & a_n^* \end{pmatrix}$$

Kuantum mekaniğinde bir fiziksel durum, Ket olarak adlandırılan $\left|a\right\rangle$ durum vektörü ile temsil edilir. Matris formunda Ket bir sütun vektörü ve Bra ise bir satır vektörüdür. İç çarpım $\left\langle a\middle|b\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k^* b_k$ biçiminde tanımlıdır. Bu çarpım genel olarak bir karmaşık sayıdır. A ve B gibi iki operatörün komütatörü $[A,B] = AB - BA$ ve anti-komütatörü $\{A,B\} = AB + BA$ biçiminde gösterilir.

Bir A gözlenebiliri için hangi fiziksel durum ile ilgileniliyorsak onun üzerinden aldığımız beklenen değeri $\langle A\rangle$ ile gösterip, $\Delta A = A - \langle A\rangle$ biçiminde bir lineer işlemci tanımladığımızda $\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle = \left\langle \left(A^2 - 2A\langle A\rangle + \langle A\rangle^2 \right) \right\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$ ifadesinin varyans olduğu açıktır.

Şimdi kuantum mekaniğinde Belirsizlik İlkesinin en genel halinin ispatını vereceğiz. M ve N iki Hermityen operatör ve $\left|\psi\right\rangle$ bir kuantum durumunu göstersin. $\left\langle \psi\middle|MN\middle|\psi\right\rangle = a + ib$ olsun. Böylece M ve N Hermityen operatörler olduğundan $\left\langle \psi\middle|[M,N]\middle|\psi\right\rangle = 2bi$ ve $\left\langle \psi\middle|\{M,N\}\middle|\psi\right\rangle = 2a$ olur. Böylece

$$4\left|\left\langle \psi\middle|MN\middle|\psi\right\rangle\right|^2 = \left|\left\langle \psi\middle|[M,N]\middle|\psi\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \psi\middle|\{M,N\}\middle|\psi\right\rangle\right|^2$$

ifadesine ulaşılır. $\left\langle a\middle|a\right\rangle\left\langle b\middle|b\right\rangle \geq \left|\left\langle a\middle|b\right\rangle\right|^2$ biçimindeki Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullandığımızda $\left|\left\langle \psi\middle|MN\middle|\psi\right\rangle\right|^2 \leq \left|\left\langle \psi\middle|M^2\middle|\psi\right\rangle\right| + \left|\left\langle \psi\middle|N^2\middle|\psi\right\rangle\right|$ ifadesi elde edilir. Son ikisinden

$$\left|\left\langle \psi\middle|[M,N]\middle|\psi\right\rangle\right|^2 \leq 4\left\langle \psi\middle|M^2\middle|\psi\right\rangle\left\langle \psi\middle|N^2\middle|\psi\right\rangle$$

ifadesini yazabiliriz. Şimdi $M = A - \langle A\rangle$ ve $N = B - \langle B\rangle$ olacak biçimde tanımlandığında

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle \psi\middle|[A,B]\middle|\psi\right\rangle\right|$$

biçimindeki eşitsizlik elde edilir. Bu ifade yukarıda tartıştığımız konum ve momentum belirsizlik ilişkisinin genel halidir. Kuantum mekaniğinde karşılık gelen operatörleri komütatif olmayan her gözlenebilir çifti için bir belirsizlik ilkesi vardır.

Önerilen Kaynak

Kuantum Mekaniği, E. Rızaoğlu, M. Yalçınkaya, Ö. Gültekin, Alfa Yayınları, 560 sayfa. (Yayınlanma sürecinde)