Gödel Kanıtlaması ve Sonuçları Üzerine Bir Değerlendirme

Özgür GÜLTEKİN
İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü, İstanbul

Kısa Özet

Matematiğin biçimselleştirilmesiyle ilgili iki temel çalışma: Russell ve Whitehead'ın Principia Mathematica'sı ve Zermelo-Fraenkel'in kümeler kuramı için geliştirdiği aksiyomatik dizgeler. Matematikte kullanılan tüm kanıtlama yöntemleri bu çalışmalarla biçimselleştirilmiştir. Bunlar matematiğin tamamının mantıktan türediğini göstermek ve bunu çelişkisiz biçimde yapmak üzere inşa edilmişti. Aksiyomların ve çıkarım kurallarının, söz konusu dizgelerde biçimsel olarak ifade edilebilecek her matematiksel soruyu sonuçlandırmaya yeterli olabileceği, dönemin yaygın düşüncesi haline gelmişti.

1931 yılında Gödel'in ortaya koyduğu çalışma bu fikirlerin doğru olmadığını göstermiştir. Gödel, doğal sayılar aritmetiğini kapsayan bir biçimsel dizgede karar verilemeyen önermeler olacağının yanısıra, doğal sayılar aritmetiğini kapsayan bir biçimsel dizgenin tutarlılığının, yine bu dizgede kanıtlanamayacağını da kanıtlamıştır.

Gödel çalışmasında, sayılar kuramının bir önermesinin yine sayılar kuramının bir önermesi hakkında olabileceğinden yola çıkarak, sayıları önermelerin yerine kodlayıp, kendine gönderme yapan çatışkılara benzer, ama öz olarak farklı özellik taşıyan bir döngü kurmuştur.

Gödel'in çalışması matematikte kesinlik, tutarlılık ve tamlık gibi sorunları ele almakla birlikte, sonuçları matematik ve mantığın dışına taşar.

Bu bildiride Gödel kanıtlamasıyla matematik felsefesinin üç ana akımı olan Formalizm, Platonizm ve Sezgicilik arasındaki ilişki incelenecektir. Ayrıca "evrende hiçbir zaman bulunması olanaklı olmayan doğrulukların olduğu" fikrinin Gödel kanıtlamasının bir sonucu olmadığı mantıksal olarak gösterilecektir.

1. Gödel Kanıtlaması Öncesi Matematik Anlayışı ve Gelişimi

1.1 Mutlak Tutarlılık Sorunu

Eski Yunan'dan beri matematiğin dizgesel olarak kurulabileceği fikri bilinmektedir. Matematiğin dizgeselleştirilmesi demek, matematik dizgenin temelini oluşturacak önermelerin, yani aksiyomların belirlenmesi, bu aksiyomlardan yola çıkarak kanıtlanacak önermeler için hangi Dönüşüm ve Oluşum kurallarının kullanılacağının saptanması demektir. Hangi aksiyomların nasıl, niçin seçilmesi gerektiği de beraberinde önemli felsefi sorunları ortaya çıkarmaktadır. Bu durum arı matematikçinin gerçek işinin aksiyomların doğruluklarına karar vermek olmadığını, öne sürülen sonuçların aksiyomlardan türetilebilirliğinin temel araştırma alanına girdiğini gösterebilir.

Aksiyomatik yöntemin kurucusu Eukleides'tir. Eukleides, kendinden önce de bilinen geometri teoremlerini çıkarımlayacak bir aksiyom dizgesi kurmuştu. Eukleides aksiyomları mantıksal olarak kanıtlanmakla birlikte, gözlemlerle de uyumluydu. Ancak bu aksiyomlardan paralellikle ilgili olanı Eskilere kendinden apaçık (self- evident) bir önerme gibi gelmedi. Paralellik aksiyomu, bir doğruya dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir paralel doğru çizilebileceğine ilişkin varsayımla eşdeğerdir. Bu önermenin Eskilere kendinden apaçık gelmemesinin nedeni, paralellik aksiyomunun uzayın sonsuz bölgeleri hakkında bir önesürmede bulunuyor olmasıdır. Çizgilerin sonsuzda kesişme fikri Eskilere yabancı değildi.

Bu nedenle bu aksiyomu kendinden apaçık sayılan aksiyomlardan türetme düşüncesi ortaya çıktı. Paralellik aksiyomunun, diğer aksiyomlardan çıkarımlanamayacak olduğu gerçeği ancak 19. yüzyılda gösterilebildi. Bu durum önemli bir sonuca işaret ediyordu. Bir dizge içindeki bazı önermelerin kanıtlanabilmesinin olanaksız olduğu da kanıtlanabiliyordu.

Bir yandan Eukleides dışı geometrilerin başlangıçta uzay hakkında açıkça yanlış önermeler olduğu düşünülmüş ve tutarlılık sorunları ayrı bir anlam taşımıştır. 1854'te Reimann tarafından " Geometriyi Oluşturan Hipotezler Üzerine" isimli tezde, uzayın bütün temel özelliklerinin, küçük uzaklıklar için geçerli olan formülden çıkarılabileceği gösterilmiştir. Bu durum, bir anlamda Eukleides dışı geometri dizgesinin tutarlılığının, Eukleides geometrisinin tutarlılığına eşdeğer olmasıdır. Yani Eukleides geometrisi tutarlı ise Riemann geometrisi tutarlıdır.

Aslında sorun çözülmemiştir, ancak başka bir alana kaydırılmıştır. A dizgesinin tutarlılığı, ancak B dizgesinin tutarlılığına bağlıdır. Eukleides aksiyomları için gözlemlerle uyuştuğu sürece doğru olduğu düşünülebilir. Aksiyomları doğrulayabilecek sonsuz sayıda örnek verilebilir, ancak böyle bir tümevarımsal kanıtlama matematik için tatmin edici olamaz. Sonsuz sayıda asal sayı olduğunu, hiç kimse bilgisayarı ile bilinenden daha büyük bir asal sayı bularak kanıtlamaya çalışmaz.

Hilbert farklı bir yol deneyerek Eukleides aksiyomlarını cebirsel doğruluklara dönüştürmüştür. Düzlem geometride "nokta" işareti bir sayı çiftiyle belirlenir, "doğru çizgi" ifadesi ise iki bilinmeyenli birinci dereceden denklemle ifade edilen sayılar arasındaki lineer ilişkiyle belirlenir. İki noktanın bir tek doğru belirlediğine ilişkin sav, iki farklı sayı çiftinin bir tek lineer ilişkiyi belirlediğine ilişkin, cebirsel doğruluğa dönüşür. Ancak Hilbert'in izlediği yol da mutlak tutarlılık için yeterli değildir. Eukleides aksiyomları tutarlıdır, ancak cebir tutarlıysa. Sorun yine bir alandan başka bir alana kaydırılmıştır. Bütün bu çalışmalardaki temel sorun modellerin sınırlı sayıda gözlem içine sığdırılabilmelerinin olanaksız olmasından kaynaklanmaktadır. Aksiyomların tutarlılığı ciddi bir sorundur, model yöntemi ilginç çözümler sunmasına rağmen, mutlak tutarlılığı göstermemektedir.

1.2 Farklı Bir Yaklaşım ve Principia Mathematica

Model yönteminin içsel sınırlılıkları olduğunun görülmesi ve Russell'ın, temel mantığın kendi çerçevesi içinde, Cantorcu sonsuz kümeler kuramında ortaya çıkan çelişki benzeri bir çelişki ortaya çıkarması, tutarlılık sorununun yeni yaklaşımlarla ele alınmasına neden oldu. Hilbert, mutlak tutarlılık sorununun, dizgenin tutarlılığının başka bir dizgenin tutarlılığına bağlanmadan çözülebileceğini öne sürdü. Bunun için dizgenin biçimselleştirilebilmesini, dizgede geçen deyimlerin tümüyle anlamlarından arındırılarak yapılandırılabilmesine bağladı. Dizgenin imleri yalnızca içi boş imler olarak görülmelidir. Bu imlerin nasıl bir araya gelecekleri ve kullanılacakları bazı kesin kurallarla saptanacaktır. Bu şekilde, içinde saklı bir şeyin bulunmadığı ve ona açıklıkla dahil edilenlerden başkasını içermeyen biçimsel imler dizgesi inşa edilecekti. İçeriksiz bir dizge hakkındaki bazı anlamlı önermeler, bu dizgeye ait olmayabilirler. Hilbert, bu anlamlı önermelerin, üst-matematik dediği matematik hakkındaki dile ait olduğunu belirtir.

≪ $2 + 2 = 4$ ≫ tamdeyimi matematiğe aittir, ancak

≪ " $2 + 2 = 4$" bir aritmetik tamdeyimidir. ≫ önermesi üst-matematiğe aittir.

Aynı şekilde $x = x$, $0 = 0$, $0 \neq 0$ tamdeyimleri matematiğe aittir ancak ≪ "x" bir değişkendir. ≫ önermesi bir üst-matematik önermesidir.

Matematik ile üst-matematik arasındaki ayrım, çalışılan konu ile bu konu hakkındaki söylem arasındaki ayrımdır. Bu ayrım oldukça önemlidir. Ancak bu şekilde gizli varsayımlardan, yersiz anlam yüklemelerden arınmış bir biçimsel dizgenin imleri bir araya getirilebilir. Yine bu ayrımla, matematiksel çalışmalarda ve çıkarımlarda kullanılan işlemlerin ve mantıksal kuralların kesin tanımlanmaları gerekmiştir. Eukleides'in sonsuz asal sayı olduğunu söyleyen kanıtlamasında, önemli sayıda üstü örtük çıkarım kuralları ve mantık ilkeleri kullanılmıştır. Bunların bazıları biçimsel mantığın ilkel kısımlarına, bazıları da niceleme kuramına aittir. Hilbert, mutlak tutarlılığın gösterilmesinde ancak sonsuz sayıdaki işlemlere başvurulmadan, "sonlayıcı" olarak adlandırılan, aksiyomların biçimsel mantıkla dizgeleştirilmesi yoluyla yapılabileceğini düşünmüştür.

19. yüzyıl matematikçileri arı matematiğin, biçimsel mantığın bir bölümü olduğunu düşündüler. Whitehead ile Russell, 1910'da yayımlanan dev eser Principia Mathematica'da, tüm aritmetiksel kavramların arı mantıksal kavramlarla tanımlanabileceğini göstermeye çalıştılar. Böylece aritmetik aksiyomların tamamı, arı mantıksal doğruluklar olan az sayıda temel önermeden çıkmış olacaktı. Sonuçta, Principia Mathematica tüm aritmetik dizgesini yorumlanmamış bir simgeler dizgesi olarak yani belirli kurallara göre bir araya gelen ve dönüşen içeriksiz imler dizgesi olarak araştırabilmenin temel aracını yaratmış oldu.

Principia Mathematica'da temel mantık önermelerinin, nasıl biçimselleştirildiklerini basitçe inceleyelim. Biçimselleştirme dört basamak içeriyor. Önce dizgede kullanılacak imlerin listesi hazırlanır. İkinci olarak, " Oluşum Kuralları", üçüncü olarak "Dönüşüm Kuralları"belirlenir ve son olarak da dizgenin aksiyomları seçilir.

Tümce değişkenleri "p", "q", "r" v.b. harflerdir.

Önerme eklemleri şunlardır:

“ ~” -----> “ değil”
“ V” -----> “ veya”
“→” ----> “ eğer”
“ .” ----> “ ve” kısaltılmışlarıdır.

Noktalama imleri de (sol ayraç ve sağ ayraçtır.) Oluşum kuralları, temel imlerin tümce biçiminde bir araya gelmelerini sağlayacak biçimde tasarlanır ve bunlara tamdeyim denir. İki dönüşüm kuralı kabul edilmiştir. Biri “ Yerine Geçme Kuralı”, bir diğeri “ Ayırma Kuralı’” dır.

Dizgenin aksiyomları da dört tamdeyimle belirtilmiştir.

1.) $(p \vee p) \to p$
2.) $p \to (p \vee q)$
3.) $(p \vee q) \to (q \vee p)$
4.) $(p \to q) \to ((r \vee p) \to (r \vee q))$

Şimdi Dönüşüm Kuralları kullanarak, hem S, hem de ~ S’in aksiyomlardan türetilebilmesinin olanaksız olduğu gösterilecektir. Önce “ $p \to (\sim p \to q)$” teoremini ele alalım. Şimdi hem S hem de ~ S’in aksiyomlardan türetilebilir olduğunu varsayalım. p’nin yerine S koyarak “ $S \to (\sim S \to q)$” teoremini elde edelim. Buradan Ayırma Kuralı ile “ $\sim S \to q$” elde edilebilir. Yine Ayırma Kuralı ile “ q” elde edilir. O halde hem S, hem de ~ S aksiyomlardan türetilebiliyorsa, bu aksiyomlar kümesinden her tamdeyim türetilebilir. Bunun tersi “ Dizge içinde her tamdeyim bir teorem değilse, biçimsel dizge tutarlıdır.” şeklinde ifade edilir. Şimdi dizgenin aksiyomlarından türetilemeyecek en az bir tamdeyim olduğu gösterilmelidir.

Tamdeyimlerin aşağıdaki üç koşulu sağlayan belirleyici ya da yapısal özelliklerini belirleyelim :

1.) Özellik, dört aksiyomda da ortak olmalıdır.
2.) Özellik, Dönüşüm Kuralına göre kalıtımsal olmalıdır.
3.) Özellik, dizgenin Oluşum Kurallarıyla uyumlu olarak inşa edilen her bir tamdeyime ait olmamalıdır.

Kalıtımsal özellik aksiyomlardan tüm teoremlere geçer ama bir imler topluluğu dizgenin bir tamdeyim olma koşullarına sahip olsa bile, eğer bir tamdeyim belirlenmiş kalıtımsal özelliği taşımıyorsa, bu bir teorem olamaz. O halde sorun yalnızca kalıtımsal özellik taşımayan bir tek tamdeyimin saptanmasıdır.

Son olarak " p V q" tamdeyimini ele alalım. Bu tamdeyim bir teorem değildir. p ve q önermelerinin her ikisi de yanlış ise tamdeyimin teorem olmayacağı açıktır. Teorem olmayan en az bir tamdeyim bulunmuş oldu. Sonuçta bu dört aksiyomdan, S'in ve ~ S'in aynı doğruluk değerine sahip olamayacağı, yani dizgenin mutlak tutarlılığının kanıtı sağlanmış oldu.

Bu aksiyomların, dizgede ifade edilen her mantıksal doğruluğu üretmeye yeterli olduğunu yani aksiyomların " tam" olduğunu belirtmek gerekir. Ancak matematiğin aksiyomlarının, tam olup olmadığı sorununa son noktayı Gödel'in çalışması koymuştur.

1.3 Richard Çatışkısı ve Eşleme Fikri

Gödel, çalışmasını inşa ederken, Fransız matematikçi Jules Richard tarafından 1905'te ortaya konulan bir çatışkıyı model olarak almıştır. Önce bu çatışkıyı inceleyelim.

Sayal sayıların saf aritmetiksel özelliklerinin formüle edildiği ve tanımlanacağı bir dili ele alalım. Bu tanımlamalardan her biri ancak sonlu sayıda sözcük içerecektir. Buna göre tanımlar dizisel bir sıraya yerleştirilebilir. Bir tanımdaki varolan harflerin sayısı, bir diğer tanımın harflerinin sayısından küçükse, ilk tanım diğerinden önce yazılacak. Eğer iki tanım da aynı sayıda harfe sahipse, hangisinin önce yazılacağı abecedeki sırasına bağlı olacaktır. Bu durumda her bir tanıma bir tek tamsayı karşılık gelecektir. Ancak bazı tanımlamalara karşılık gelen sayı, o tanımlamanın özelliklerine uyabilecektir. Örneğin, " 1'den ve kendinden başka hiçbir tamsayıyla bölünmez." Tanımındaki ifadenin sıra sayısının 17 olduğunu varsayıldığında, 17'nin kendisinin tanımındaki ifadeyle aynı özelliğe sahip olduğu açıktır. İşte bu özelliği sağlayan sayıları Richardcı olmayan sayılar, bu özelliği sağlamayan sayıları da Richardcı olan sayılar olarak adlandıralım. O halde, "x" in Richardcı olmasını, " x'in, tanımlar kümesinde karşılık geldiği sayının, tanımda belirtilen özelliğe sahip olmaması" olarak ifade edebiliriz. Şimdi Richardcı olma özelliğini tanımlayan deyim açıkça tamsayıların, sayısal özelliklerini betimlemektedir. Dolayısıyla tanımın kendisi de sözü edilen tanımlar dizisine aittir ve bu tanımın kendisine de karşılık gelen , onun yerini belirleyen bir " n" tamsayısı vardır. Çatışkının vurucu noktasına gelmiş bulunuyoruz. Sorulacak soru şudur:
" n tamsayısı, Richardcı mıdır ?" Açıktır ki " n" sayısı Richardcıdır yalnız ve yalnızca " n" sayısı Richardcı değilse. Bu halde " n" sayısı hem Richardcıdır, hem de Richardcı değildir.

Richard çatışkısını ortaya çıkartan neden, kolayca görülebilir. Tamsayıların saf aritmetiksel özelliklerinin tanımlarını ele almak konusunda karara varılmıştı. Ancak n. Sırada bulunan tanımlama, tamsayıların saf aritmetiksel özelliklerini betimlemez. Yeni bir notasyonla ortaya çıkan bir özelliği belirtir. O halde Richard çatışkısı aritmetiğin içindeki önermelerle, aritmetiğin kodlandığı notasyon dizgesinin önermelerini, birbirinden ayırmakla aşılabilir.

Görüldüğü gibi, Richard çatışkısının inşasında kullanılan usavurma yanıltıcıdır. Gödel çalışmasında Richard çatışkısını model olarak kullanmış, daha iyi bir deyimle ondan esinlenmişti. Ancak Gödel, bu çatışkının temel usavurmasındaki yanıltıcı özelliklerden çok başarılı biçimde uzak durmuştur. Bu çatışkı, Gödel'e üst-matematiksel önermelerin bir biçimsel dizge içinde birebir eşlenebilmesinin ya da yansıtılmasının olanaklı olduğu yönünde esinlendirici olmuştur. Üst matematiksel karmaşık önermeler, dizgenin içindeki aritmetiksel önermelere çevrilebilirse, üst-matematiksel kanıtlamaları kolaylaştırıcı bir kazanç sağlanmış olacaktı.

2. Gödel Kanıtlaması

2.1 Gödel Sayılaştırması ve Üst-matematiğin Aritmetikleştirilmesi

Gödel, tüm bilinen aritmetiksel yazılımların ifade edilebileceği ve aritmetiksel bağıntıların kurulabileceği bir biçimsel dizge betimledi. İlk olarak bu dizge içinde her temel ime, her tamdeyime, ve her kanıtlamaya bir tek sayı getirilebileceğini gösterdi.

Dizgenin temel imleri, sabit imler ve değişkenlerdir.

Sayısal Değişkenler : " x", " y", " z" v.b. Bunların yerine sayılar ve sayısal deyimler koyulabilir.

Önerme Değişkenleri : " p", " q", " r" v.b. Bunların yerine tamdeyimler koyulabilir.

Yüklem Değişkenleri : " P", " Q", " R" v.b. Bunların yerine " Asal olma", "Büyüktür" v.b. yüklemler koyulabilir.

i) Her farklı sayısal değişkene 10'dan büyük bir asal sayı

ii) Her farklı önerme değişkenine 10'dan büyük bir asal sayının karesi

iii) Her farklı yüklem değişkenine 10'dan büyük bir asal sayının kübü

karşılık getirilir.

Sabit İmler	Gödel Sayısı	Anlamı
~	1	değil
V	2	veya
→	3	eğer, demek ki...
∃	4	en az bir
=	5	eşit
0	6	sıfır
s	7	bir sonraki ardılı
(	8	noktalama imi
)	9	noktalama imi
,	10	noktalama imi

Sayısal Değişkenler	Gödel Sayısı	Olanaklı Yerine Koyma
x	11	0
y	13	s0
z	17	y

Önerme Değişkenleri	Gödel Sayısı	Olanaklı Yerine Koyma
p	11^2	0 = 0
q	13^2	(∃ x) (x = sy)
r	17^2	p → q

Yüklem Değişkenleri	Gödel Sayısı	Olanaklı Yerine Koyma
P	11^3	Asal
Q	13^3	Asal değil
R	17^3	den büyüktür

Şimdi “ (∃ x) (x = sy)” tamdeyimini ele alalım.

(∃ x) (x = sy) : 8 – 4 – 11 –9 – 8 – 11 – 5 – 7 – 13 – 9 sayıları bu tamdeyimin imlerinin Gödel sayılarıdır. Bu tamdeyime bir sayılar topluluğu getirmek yerine, şöyle bir sayı karşılık getirilebilir.

$2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{11} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{13} \times 29^9$

bu sayı yukarıdaki tamdeyimin Gödel sayısı olacaktır. Benzer şekilde bir tamdeyim dizisinin de tek bir Gödel sayısı olur.

$(\exists x)(x = sy)$ Gödel sayısı m olsun.

$(\exists x)(x = s0)$ Gödel sayısı n olsun.

Bu dizinin Gödel sayısı : $2^m \times 3^n$ olur.

Dizgedeki her deyime, ister bir temel im olsun, ister bir imler dizisi veya bir diziler dizisi olsun, bir tek Gödel sayısı karşılık getirilebilir.

Benzer şekilde elimizde bir Gödel sayısı varsa, onun simgelediği deyimin ne olduğu kolayca bulunabilir.

A	243.000.000
B	64 x 243 x 15 625
C	$2^6 \times 3^5 \times 5^6$
D	6 – 5- 6
E	0 = 0

Biçimsel dizgedeki her deyime bir Gödel sayısı karşılık geldiğinden, deyimler hakkındaki ve deyimlerin birbirleriyle bağıntıları hakkındaki üst-matematiksel önermelerin, onlara karşılık gelen sayılar hakkındaki ve bu sayıların birbiriyle olan aritmetiksel bağıntıları hakkındaki önermeler olduğu düşünülür. Böylece üst-matematik tümüyle aritmetikleştirilmiş olacaktır.

Son olarak şu iki notasyonu tanıyalım.

Dem (x, z) : x Gödel sayılı tamdeyimler dizisi, z Gödel sayılı tamdeyimin kanıtlamasıdır.

Sub (y, 13, y) : 13 Gödel sayılı değişkenin yerine y sayısı koyularak bulunan, “ y Gödel sayılı tamdeyimden elde edilmiş tamdeyimin Gödel sayısıdır.”

2.2 Gödel Kanıtlamasının Özü

Şimdi Gödel Kanıtlamasını beş adımda inceleyelim.

i) “ G tamdeyimi kanıtlanabilir değildir.” üst-matematiksel önermesini temsil edecek bir aritmetiksel G tamdeyimi inşa edilir. G tamdeyimine bir h sayısı karşılık gelir ve bu tamdeyim “ h sayısına karşılık gelen önerme kanıtlanabilir değildir.” önermesine karşılık gelecek biçimde inşa edilir. Burada özellikle Richard çatışkısının yanıltıcı usavurmasından kaçınılmıştır.

ii) G’nin, yalnız ve yalnız, onun biçimsel değillemesi olan ~ G kanıtlanabilir ise kanıtlanabilir olduğunu göstermiştir. O halde dizge tutarlı ise ne G, ne de ~ G kanıtlanamaz.

iii) G biçimsel olarak kanıtlanamaz ama üst-matematiksel usavurmayla doğru bir önerme olduğu anlaşılabilir.

iv) G hem doğru hem de kanıtlanabilirse, aritmetiğin aksiyomları tam değildir. Ayrıca aritmetik özsel olarak tam değildir. Aksiyomlar listesine yeni aksiyomlar eklense bile, her zaman biçimsel olarak karar verilemeyecek başka bir tamdeyim inşa edilebilir.

v) Gödel “ Aritmetik tutarlıdır.” Üst-matematiksel önermeyi temsil edecek bir A tamdeyiminin nasıl inşa edilebileceğini gösterdi. “ $A \rightarrow G$” tamdeyiminin biçimsel olarak kanıtlanabilir olduğunu kanıtladı. Son olarak da A tamdeyiminin biçimsel aritmetiksel dizge içinde kanıtlanabilir olmadığını gösterdi.

Şimdi uslamlamayı daha yakından inceleyelim.

i) (1) (x) ~ Dem (x, Sub (y, 13, y)) şeklindeki tamdeyim aritmetiksel biçimsel dizgeye aittir ama üst-matematik bir önermeyi temsil eder.

(1) tamdeyimi “ ‘Sub (y, 13, y)’ Gödel sayılı tamdeyim kanıtlanabilir değildir.” anlamına gelip, üst-matematiksel bir önermeyi temsil eder. Bu tamdeyim biçimsel dizgeye aittir ve hesaplanabilir bir Gödel sayısı vardır. Bu sayıya ‘n’ diyelim.

(G) (x) ~ Dem (x, Sub (n, 13, n)) tamdeyimi de aritmetiksel biçimsel dizgeye aittir. Sub (n, 13, n) notasyonunun karşılığı düşünülüp, (1) tamdeyiminde de “ y” değişkeninin yerine “ n” değişkeni getirildiği görülünce, G tamdeyiminin Gödel sayısının “ Sub (n, 13, n)” olduğu görülebilecektir.

“ (x) ~ Dem (x, Sub (n, 13, n))” aritmetiksel tamdeyiminin şu üst-matematiksel önermeyi temsil ettiği açıktır : “(x) ~ Dem (x, Sub (n, 13, n))” tamdeyimi kanıtlanabilir değildir. Bu durumda, G aritmetiksel tamdeyiminin, kendisinin kanıtlanabilir olmadığını belirttiği anlaşılır.

ii) Eğer G tamdeyimi kanıtlanabilir ise, onun biçimsel değillemesi olan “ ~ (x) ~ Dem (x, Sub (n, 13, n))” tamdeyimi de kanıtlanabilir olacaktır aynı şekilde, eğer G’nin biçimsel değillemesi kanıtlanabilir ise, G’nin kendisi de kanıtlanabilir olacaktır. Eğer aksiyomlar tutarlıysalar, G biçimsel olarak karar verilebilir değildir.

iii) “ (x) ~ Dem (x, Sub (n, 13, n)) tamdeyimi doğrulanabilir değildir.” üst-matematiksel önermesinin doğru olduğu kanıtlanmıştı. Bu önerme, aritmetiğin içinde tam da önermedeki tamdeyim tarafından temsil ediliyor. Üst-matematiksel önermeler aritmetiksel biçimselleşmeyle, doğru üst-matematiksel önermeler doğru aritmetiksel tamdeyimlere karşılık gelecek şekilde eşlenirler. Buradan, doğru bir üst-matematiksel bir önermeye karşılık gelen G tamdeyiminin de doğru olması gerektiğidir.

iv) G, aritmetiğin içinde biçimsel olarak çıkarımlanamayan doğru bir aritmetik tamdeyimidir. Bu durumda matematiğin aksiyomları tam değildir. Ancak G, bir aksiyom olarak diğerlerine eklense bile, aksiyom kümesi yine de tam olmayacaktır. Çünkü yeni dizgede de, biçimsel olarak karar verilemeyen G türünde bir tamdeyim inşa edilebilecektir. Bu durum aksiyomatik yöntemin içsel sınırlılığını gösterebilir.

v) “ Aritmetik tutarlıdır” üst matematiksel önermesi daha önce gösterildiği gibi “ Kanıtlanamayan en az bir aritmetik tamdeyimi vardır.” önermesi ile eşdeğerdir. Bu son önerme biçimsel dizgede aşağıdaki “A” diyeceğimiz önerme ile temsil edilir.

(A) (∃ y) (x) ~ Dem (x, y) Bu önerme, “ En az bir y sayısı vardır ki, bütün x’ler için x, y ile Dem bağıntısında değildir.” şeklinde okunur.

Şimdi “ Eğer aritmetik tutarlıysa, aritmetik tam değildir” önermesi inşa edilebilir.

$$(\exists y) (x) \sim \mathrm{Dem} (x, y) \rightarrow (x) \sim \mathrm{Dem} (x, \mathrm{Sub} (n, 13, n))$$

Bu tamdeyim A → G şeklinde ifade edilir. Önce “A → G” önermesinin kanıtlanabilir olduğunu varsayalım. Ayırma Kuralı gereğince G de kanıtlanabilir olmalıdır. Ancak biçimsel dizge tutarsız olmadıkça G kanıtlanabilir değildir. O halde aritmetik tutarlıysa A tamdeyimi kanıtlanabilir değildir.

3. Gödel Kanıtlamasının Matematik Felsefeleri Üzerine Etkisi ve Tartışmalar

Felsefeyi metafizik baskıdan kurtarma düşüncesiyle, matematik ve mantıkta biçimselleştirme çalışmalarının birbiriyle etkileşim içinde oldukları söylenebilir. Simgesel mantıkla felsefenin sınırları belirlenmiş olacak, metafizik kapı dışarı edilecekti. Ancak 19. yüzyıl pozitivizmini yalnız idealist felsefeye bir tepki diye görmek doğru olmaz. Çünkü pozitivizmin kökleri idealist felsefenin yükselişinden daha önceye düşer. İdealist felsefenin geçerliliğinin sarsıldığı dönemde, pozitivizmin geniş çevrelere yayılabildiğini söylemek daha doğru olur. Burada ancak matematik felsefesinin akımlarından olan, Sezgicilik, Formalizm ve Platonizm tartışılabilecektir.

Sezgicilik 1924'te, Hollandalı matematikçi L.E.J. Brouwer tarafından ortaya konulmuştur. Aslında kökenlerinin Platon'un öğrencisi Aristoteles'e kadar uzandığı söylenebilir. Sezgiciler "üçüncünün olmazlığı" yasasını yadsıyarak varlık sorununa farklı bir yaklaşım getirme girişimlerinde bulunmuşlardır. Sezgiciler matematiksel nesnenin gerçekten varolduğunu kabul etmeden önce, onun kesin bir ussal yapısının sunulması gerektiğini söylerler. Doğruluğu henüz kanıtlanamamış herhangi bir teorem şu an için ne doğru, ne de yanlış olacaktır. Bu yaklaşım Platonistlerin, matematiksel nesnelerin varlık sorunu konusundaki anlayışlarını, sezgicilerden daha farklı çözümledikleri anlamına gelebilir. Biz burada Platonizmin, matematiksel nesnelerin varlık sorununu Gödel teoreminin sonuçlarıyla ilişkilendirmelerini inceleyeceğiz.

Platonizme göre, matematiksel doğruluk mutlak, dışsal ve ebedi olup, insan yapısı kriterlere dayanmayıp, matematik nesnelerinin kendilerine özgü ve zamanla sınırlı olmayan bir varlığa sahip oldukları, ne insan toplumuna ne de belirli fiziksel nesnelere bağlı olmadıkları söylenebilir. Platonizme göre, matematiksel doğruluk kavramında, mutlak ve " Tanrı vergisi" olan bir şey vardır. Konumuz Gödel Kanıtlaması'nın Platonist düşünce için ne söyleyip, ne söylemediğidir, yine de bu düşünce tarzına karşı şöyle bir yaklaşım sunulabilir:

Arı matematiğin, herkesin kendi özel deney ve görgüsünden bağımsız bir öneme sahip olduğu doğrudur, zaten bu bütün bilimlerin herkesçe bilinen genel yapısıdır. Ancak arı matematikte hiçbir zaman aklın kendi öz yaratışları ve düşünüşleriyle ilgilenilmez. Rakam ve şekil kavramları, gerçek dünyadan başka hiçbir yerden alınmış değildir. İnsanların on parmaklarıyla sayması, yani ilk aritmetik işlemini yapmayı öğrenmiş olmaları çeşitli şeylerden kaynaklanabilir ama aklın bir yerlerde gizli gerçeği yaratışı değildir. Saymak, sadece sayılabilecek nesnelerin varlığını değil, varlığın geri kalan diğer özelliklerinin bir kenara bırakılabilmesi yeteneğini de gerektirir. Bu yetenek ise tarihi deneylere ve görgüye dayanan bir gelişim sonucu belirginleşmiştir. Rakam kavramı gibi şekil kavramı da sadece dış olgulardan alınmıştır, sırf düşünmekle kafadan çıkmış değildir. Şekil kavramına varabilmek için, önce şekilleri olan nesnelerin bulunması, bunların şekillerinin birbiriyle ilişkilerinin incelenmesi gerekir. Arı matematiğin konusu çevre şekilleri ve gerçek ortamın nicel ilişkileri, yani açıkça doğal ortamın maddi temelleridir. Bu şekilleri ve ilişkileri katkısız olarak inceleyebilmek için, onları içeriklerinden bütünüyle ayırmak ve bu içeriği ne olursa olsun bir kenara bırakmak gerekir. Boyutları bulunmayan noktalar, kalınlığı ve enliği olmayan çizgiler, a ve b' ler, x ve y'ler, değişen ve değişmeyen değerler böyle elde edilir. Matematik niceliklerin sanki birbirinden türüyormuş gibi gözükmeleri de onların apriori içerikli olmalarına kanıt değildir, bu ancak rasyonel bağlılıklarına kanıt olabilir. Bir silindir şeklinin, dikdörtgenin kenarlarından biri etrafında döndürülmesinden meydana geldiği düşüncesine varmadan önce, tam mükemmel olmasa bile, bir çok gerçek dikdörtgenler ve silindirler incelemiş olmak gerekir. Öteki bilimler gibi matematik de insanların ihtiyaçlarından doğmuştur. Arazinin ölçülmesi, kapların sığasını ölçmek, zamanı hesaplamak ve mekanik matematiğin doğumu ve gelişimi için nedenlerdir. Fakat bir çok düşünce alanında olduğu gibi, belirli bir gelişme durumunda, gerçek evrenden soyutlanmış olan gerçek evren yasaları, gerçek evrenden ayrı tutulup, dışardan gelen, dünyanın uymak zorunda olduğu kanunlar olarak gerçek evrenin karşısına çıkarılmaktadır. Sonuç olarak matematik yasaları evrenin yasaları olarak uygulanabilmektedir ancak bu matematiğin kaynağının evrendeki olgular olmasından doğmaktadır, saf mantıksal gerçekliğinden değil.

Platonizmin savunucularından biri olan fizikçi Roger Penrose " Kralın Yeni Usu" isimli çalışmasında Gödel teoremine gönderme yaparak şunları yazar :

> Matematiksel formalizmi ne pahasına olursa olsun savunanlar gerçekten kaygılanmalılar, çünkü uyguladığımız uslamlamayla , formalistlerin " doğru" hakkındaki görüşlerinin eksik olduğunu gösterdik. Aritmetik için hangi formel sistem kullanılırsa kullanılsın, doğru olduklarını görebildiğimiz fakat formalistin önerdiği yöntemle, doğruluk değeri doğru ile tanımlanamayan bildirimler vardır.

Gödel teoremi, yeterince güçlü hiçbir biçimsel dizgenin, her doğru önermeyi bir teorem olarak yeniden üretebilmesi anlamında yetkin olamayacağını söyler. Burada sormak gerekir, bu bir kusur mudur ? Eğer biçimsel dizgenin ne yapabilecekleri konusunda gerçekçi olmayan beklentileriniz varsa, bu olgu bir kusur gibi gözükebilir. 1900'lü yılların başında matematikçiler, aksiyomlar dizgesinin bütün sorunları çözebileklerini düşünerek, gerçekçi olmayan beklentilere sahip olmuşlardır. Bu durum formalistler için hiç de Penrose'nin vurguladığı gibi öldürücü değil, ancak titretici bir sorundur. Aksiyomatik dizgelerden beklentilerimizin, neler olabileceğinin sınırlarını çizer ama aşağıda inceleyeceğimiz gibi algoritmaların içsel sınırlılıkları, hiçbir zaman insan gibi düşünen “ zeki” makineler yapılamayacağını, insan yapısının fizyolojik özelliklerinin bir sonucu olarak bilincin ele alınamayacağını göstermez. Önce karşıt fikirlere bakmaya devam edelim. Penrose değerlendirmesinde şunları da yazar :

> Söz konusu sistemleştirmenin, kendinden bekleneni doğru olarak gerçekleştirmesini sağlamak için, daha önce G’nin doğru bir önerme olduğunu kanıtlarken yaptığımız gibi, sistemin dışında bir kaynaktan, sezgilerden yararlanacağız. Ancak, sezgiler sistemleştirilemez ve bu nedenle, gerçekten, herhangi bir algoritma işleminin dışında kalmaktadırlar.

Penrose’nin de farkında olduğu gibi sezgi olarak değerlendirdiği, mantıkçıların düşünce ilkesi adını verdikleri genel yöntemin bir örneğidir. Ancak burada G tamdeyiminin doğruluğunu anlamak için bir algoritma yazılamayacağı fikri örtük olarak belirtilmiştir. Çünkü G’nin doğruluğunun sezgi olduğu ve sezgilerin sistemleştirilemez olduğu belirtilmektedir. Ancak G tamdeyiminin doğruluğunu göstermek üzere bir algoritma yazılamayacağı doğru değildir, sorunun isabetsiz biçimde yanlış yorumlanmasıdır. G tamdeyimini doğrulayacak veya yanlışlayacak şekilde aksiyomatik dizge genişletilebilir. Elbette bu defa da dizge içinde karar verilemeyecek bir G_1 tamdeyimi kurulabilecektir, ama bu bütünüyle tarif edilenden farklı bir duruma işaret eder. Sistemi G’ye karar verebilecek şekle dönüştürülmek üzere genişletmeyle, G’yi karar verilebilir kılabiliriz. Buradaki sorun sistemin içinde her zaman G yapısında bir tamdeyim bulabileceğimizdir, ama bulunan herhangi bir G tamdeyimini karar verilebilir yapmak için algoritma üretemeyeceğimiz kabul edilemez. Algoritmalaştıramayacağımız tek şey bir sonraki G tamdeyiminin nasıl kurulabileceğidir. Oxford felsefecilerinden biri olan J.R. Lucas’ın “ Zihinler, Makineler ve Gödel” isimli çalışmasındaki “ Gödel’in insana özgü usavurmayla, mekanik usavurma arasındaki önemli bir farkı ortaya koyduğu” şeklindeki bir değerlendirmesini inceledikten sonra, bu sorunu, tekrar ele alalım. Lucas “ Yapay Zeka” ile ilgili şöyle der :

> Kurduğumuz makine ne kadar karmaşık olursa olsun, eğer bir makineyse bir biçimsel dizgeye karşılık gelecektir, ve bu dizge de bu dizge içinde ispatlanamaz bir tamdeyim bulmak Gödel yordamına maruz kalacaktır. Bir zihin onun doğru olduğunu bulabilmesine karşın bu tamdeyimi makine doğru olarak üretemeyecektir. Ve dolayısıyla makine zihnin upuygun bir modeli olmayacaktır.

Buradaki ana düşünce, bizim dizgenin dışında olup, içten doğru olduğu farkedilemeyen tamdeyimi, dizgenin dışında bir yol ile anlayabilmemizdir. Ama bir makine, bir dizgenin dışından Gödel tamdeyimi sorununu çözebilen, bir başka dizge ile neden beslenemesin ? Lucas bununla ilgili şöyle yazıyor :

Gödel tamdeyiminin inşa edildiği yordam standart bir yordamdır, bundan dolayı bir Gödelci tamdeyimin her biçimsel dizge için kurulabileceğinden emin olabiliriz. Ama eğer o standart bir yordamsa, o zaman onu yerine getirebilecek bir programın da programlanabilir olması gerek... Bu, biçimsel dizgenin geri kalanının Gödelci tamdeyimin bir teorem olarak eklenmesini, ve sonra bu yeni, güçlendirilmiş biçimsel dizgenin Gödelci tamdeyiminin bir teorem olarak eklenmesini sağlayan ek bir çıkarım kuralına sahip bir dizgeye sahip olmaya tekabül eder... Bir biçimsel dizgeye, ardışık Gödelci tamdeyimlerden oluşan sonsuz ilksavlar kümesi eklesek bile, sonuçta ortaya çıkan dizge yine de eksiklidir, ve ussal bir varlığın, dizge dışında durarak, doğru olduğunu görebildiği dizge içinde ispatlanamayan bir tamdeyim içerir... Mekanik model, bir anlamda sonlu ve belirli olmalıdır, öyleyse zihin işini daima daha iyi yapar.

Şimdi bu yazılanları değerlendirelim. Önce bir aksiyomatik dizge varsayıp bunu A ile gösterelim. Bu A dizgesi içinde, karar verilemeyen bir G_1 (Gödel) tamdeyimi kurulabilir. Bu tamdeyim veya onun biçimsel değillemesi olan $\sim G_1$ keyfi olarak A dizgesine eklenebilir. Ancak şimdi elde edilen $A + G_1$ veya $A + \sim G_1$ dizgesi içinde karar verilemeyen G_2 tamdeyimi bulunabilecektir. Bu tamdeyim de dizgeye eklenerek, yeni bir dizge ve yeni bir biçimsel dizgede karar verilemeyen G_n tamdeyimi elde edilebilir. Bu işlem sürekli olarak tekrarlanabilir. Doğal olarak, bir süre sonra bütün işlem rutinleşmeye başlar. G_n'lerin yapısı incelendiğinde, onların hepsinin bir tek kalıptan döküldüğü, bu da onların hepsinin temsil edilmesi için bir tek ilksav şemasının yeterli olabileceği anlamına gelir mi ?

Aksiyomatik dizgenin kusuru bellidir, kendi içsel sınırlılığı aksiyomatik dizgede koca bir delik oluşturmakta. Aksiyomlar dizgesinde, G tamdeyimini karar verilebilir kılacak onarmalar yapıldığında, yeni bir delik oluşmakta, ama biz bu deliklerin en baştan oluşacağını görüp, tüm delikleri en baştan kapatamaz mıyız ? $A + G_n$ dizgesini kurabilsek, bu defa apayrı bir yöntemle, yeniden Gödel tamdeyimi kurulabilecektir. Gödel tamdeyimleri, aksiyomatik dizgenin özsel eksikliğidir. Dizgenin oluşumundan kaynaklanan bir eksikliktir. Ama burada şöyle bir şey düşünülmelidir. Eğer Gödel tamdeyimi belli bir algoritmaya göre ortaya çıkmıyorsa, her genişletilmiş dizgede, Gödel tamdeyiminin kurulmasının bir soru olduğu görülebilir, o halde neden insan zihninin çok ileri aşamada bile en karmaşık Gödel tamdeyimlerini kurabileceği düşünülür. Bunun için bir neden var mıdır ? Gödel'in teoremi insan zihninin her durumda çok karmaşık yapıya sahip olan dizgelerde bile, Gödel tamdeyimini kurabileceğinden bahseder mi ? İnsanların yetenekleri, yaratıcılıkları elbette kişiden kişiye farklılık gösterir. İnsanların fiziksel güçleri de kişiden kişiye farklılık gösterir. Bir insan 100 kilo ağırlığı kaldırabilirken, başka bir insan da 150 kilo ağırlığı kaldırabilir ama hiçbir zaman hiçbir insanın 1000 ton ağırlığı kaldırması beklenemez. Bu durumda, aksiyomatik dizgeyi her G_n tamdeyimini çıkarması için genişlettiğimizde, insanların her zaman yeni bir karar verilemeyen G tamdeyimi oluşturabileceğinden nasıl emin olunabilir. Karar verilemeyen G tamdeyimi sorunu, elbette yeterince gelişmiş her dizge için özsel bir sorundur ama her G tamdeyiminin insanlar tarafından ortaya çıkarılabilmesinin, bu özsellikle hiçbir ilişkisi yoktur. O halde insan “ zihni” de yeterince karmaşık herhangi bir G tamdeyimi karşısında savunmasız kalabiliyor. Elbette bu durum “evrende yapısını anlayamayacağımız olgular olduğu anlamına” gelmez. Burada matematiğin kavramlarının, evrendeki doğal olguların bütün özelliklerinin bir kenara bırakılarak oluşturulduğu fikri önemlidir, bu da farklı bir tartışmanın konusudur. Ancak burada şu söylenebilir: Eğer hiçbir algoritmik yöntem, Gödel yönteminin bütün mümkün biçimsel dizge türlerine nasıl uygulanacağını söylemiyorsa, insanın da Gödelleştirme yeteneğinin sınırına varacağı sonucunu kabul etmemiz gerekir. O zaman insan ile gelişkin bir biçimsel dizge arasında herhangi bir fark var olsa bile, Gödel teoreminin bunu söylemediği açıktır.

Kaynakça

Nagel E, Newman J.R. – (1994) - Gödel Kanıtlaması - Sarmal Yayınları

Hofstadter D. R. – (2001) - Gödel, Escher, Bach – Kabalcı Yayınları

Penrose R. – (2000) - Kralın Yeni Usu – Tübitak Yayınları

Gödel K. - (1962) - On Formally Undecidable Propositions - Basic Books

Lucas J.R. – (1961) - Minds, Machines and Gödel - Philosophy